Практикалық сабақ №9

Тақырыбы: Еселі интегралдардың кейбір қолданыстары.

Мақсаты: Еселі интегралдардың аудандар және көлемдер есептеуге қолдану, физикада қолданылуы.

Екі еселі интегралды геометрияда және физикада қолдану.

Мысал 1. I-ширекте орналасқан және, $z=3x, y=1+x^2$, $y=5, z=0$ беттерімен шенелген дененің көлемін есептеу керек.

Шешуі: $z=f(x,y)=3x, 0\le x\le 2,\ y=1+x^2\le y\le 5$.

$$V=\iint\limits_D 3xdxdy=3\int_0^2 xdx\int_{1+x^2}^5 dy=3\int_0^2 (4x-x^3)dx=3\left[2x^2-\frac{1}{4}x^4\right]\Bigg|_0^2=12.$$

Мысал 2. D: $x=4y-y^2, x+y=6$ сызықтармен шенелген жазық фигураның ауданын есептеу керек.

Шешуі: Сызықтардың қиылысу нүктелерін табамыз.

$$\begin{cases} x+y^2-4y=0 \\ x+y=6 \end{cases} \Rightarrow x_1=4, x_2=3;\ y_1=2,\ y_2=3,\ \ A(4;2), B(3;3)\ .$$

Сондықтан

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int_2^3 dy\int_{6-y}^{4y-y^2} dx=\int_2^3\left(-y^2+5y-6\right)dy=\left(-\frac{1}{3}y^3+\frac{5}{2}y^2-6y\right)\Bigg|_2^3=\frac{1}{6}.$$

Мысал 3. $x^2+y^2=2x$ цилиндрінің ішіндегі $z=\sqrt{x^2+y^2}$ конус бөлігі бетінің ауданын есепте.

Шешуі: Конустың теңдеуінен $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

Интегралдау аймағы $x^2+y^2=2x$ шеңберімен шенелген дөңгелек ($x^2+y^2-2x=0, (x-1)^2+y^2=1$ шеңбердің теңдеуі) немесе $\rho=2\cos\theta$, онда

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_D dxdy=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho d\rho=$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\rho^2\Bigg|_0^{2\cos\theta}d\theta=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2\theta\right)d\theta=$$

$$=2\sqrt{2}\left(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi\sqrt{2}.$$

Мысал 4. $y^2=4x+4,\ y^2=-2x+4$ сызықтарымен шенелген фигураның ауырлық центрінің координаттарын табыңдар.

Шешуі: Берілген фигура Ox өсі бойынша симметриялы, онда $y_c = 0$, сондықтан x_c - ны табамыз. Жазық фигураның ауданын табайық.

$$S = \iint_D dxdy = 2\int_0^2 dy \int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)} dx = 2\int_0^2 \left(\frac{4-y^2}{2} - \frac{y^2-4}{4} \right) dy =$$

$$= 2\int_0^2 \left(3 - \frac{3y^2}{4} \right) dy = 6\left(y - \frac{y^3}{12} \right)\Big|_0^2 = 8, \; S = 8.$$

Осыдан

$$x_c = \frac{1}{8}\iint_D xdxdy = \frac{1}{8} \cdot 2\int_0^2 dy \int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)} xdx = \frac{1}{8}\int_0^2 \left[\frac{1}{4}\left(4-y^2\right)^2 - \frac{1}{16}\left(y^2-4\right)^2 \right] dy =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2 \left[3 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{16}y^4 \right] dy = \frac{1}{8}\left[3y - \frac{1}{2}y^3 + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{5}y^5 \right]\Bigg|_0^2 = \frac{2}{5}: \; x_c = \frac{2}{5}, \, y_c = 0.$$

Үш еселі интегралдардың қолданулары

Мысал 5. Үш еселі интегралды пайдаланып, $y = \sqrt{x}, \; y = 2\sqrt{x}, \; x + z = 4, \; z = 0$ беттерімен шенелген дененің көлемін табыңдар.

Шешуі: Жоғары жағынан $x + z = 4$ беті, ал төменгі жағынан $z = 0$ жазықтығы, ал бүйір жағынан $y = \sqrt{x}$ және $y = 2\sqrt{x}$ тік цилиндрлермен шенелген цилиндрлік дене деп қарастырамыз. Онда

$$V = \iiint_V dxdydz = \iint_D dxdy \int_0^{4-x} dz = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{4-x} dz = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4-x)dy =$$

$$= \int_0^4 (4-x)\left(2\sqrt{x} - \sqrt{x}\right)dx = \int_0^4 (4-x)\sqrt{x}dx = \left(4 \cdot \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} \right) \Big|_0^4 = \frac{128}{15}$$

Аудиториялық жұмысы: Еселі интегралдардың аудандар және көлемдер есептеуге қолдану, физикада қолданылуы: [8] №№ 3984, 3987, 4007, 4036, 4052, 4061, 4101, 4107, 4133, 4143.

Үй жұмысы

№№ 3988, 3996, 4013, 4037, 4053, 4063, 4102, 4134, 4145.